

LAHENDUSED 7. KLASS

1. Vastus: Lõikamise teel saadud lühemate osade aritmeetiline keskmine on 3,5 cm.

Lahendus:

Olgu viienda posti pikkus x cm.

Siis nende postide pikkuste aritmeetiline keskmine on $\frac{x \text{ cm} + 129 \text{ cm} + 132 \text{ cm} + 132 \text{ cm} + 138 \text{ cm}}{5} = \frac{x \text{ cm} + 531 \text{ cm}}{5}$ ja see peab olema naturaalarv.

Selleks, et see oleks naturaalarv, peab $x + 531$ jaguma arvuga 5. Seejuures teame, et x peab olema suurem kui 129 ja väiksem kui 138.

Seega arvule 531 tuleb juurde liita arv, mille üheliste number on 4 või 9 ning see arv peab jääma arvude 129 ja 138 vahele. Seega viies post peab olema pikkusega 134 cm.

Viie posti pikkuste aritmeetiline keskmine on $\frac{134 \text{ cm} + 531 \text{ cm}}{5} = \frac{665 \text{ cm}}{5} = 133 \text{ cm}$.

Sellest pikemaid poste on kaks 134 cm ja 138 cm.

Lõigates neist osad pikkusega 133 cm, jäävad alles jupid pikkustega 1 cm ja 5 cm, millede aritmeetiline keskmine on $(1 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) : 2 = 3 \text{ cm}$.

Hindamine:

Avaldatud viie posti pikkuste aritmeetiline keskmine	2p
Näidatud/põhjendatud, miks on vaid üks võimalus viienda posti pikkuseks	2p
Leitud viienda posti pikkus	1p
Leitud viie posti pikkuste aritmeetiline keskmine	1p
Leitud saadud lühemate osade pikkused ja nende aritmeetiline keskmine	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Antud vaid õige vastus 2p

2. Suurim arv kaarte on 5 ning ühes virnas on kaardid arvudega 4, 12, 20 ning teises kaardid arvudega 8 ja 28.

Lahendus:

Antud 7 kaarti seas on ühel paaritu arv ja ülejäänutel paaris.

Kui ühes virnas oleks paaritu arv, siis peaks ka teises olema. Seega kindlasti, ei saa kasutada kaarti, millel on arv 3.

Ülejäänud kaartidel olevate arvude summa on $4 + 6 + 8 + 12 + 20 + 28 = 78$.

Seega kui neid kõiki saaks kasutada, peaks ühes virnas olevate kaartide summa olema

$78 : 2 = 39$. See aga pole võimalik, sest meil on vaid paarisarvudega kaardid. Seega vähemalt ühte neist kuuest paarisarvuga kaardist ei saa kindlasti kasutada. Selleks, et summa pooleks jaotades saaksime paarisarvu, peab summa jaguma arvuga 4. Kuue paarisarvu seas on vaid üks arv, mis ei jagu arvuga 4. Seega tuleb välja jätta kaart arvuga 6. Ülejäänud 5 kaarti saab tõesti jaotada kahte virna nii, et esimese virna kaartidel olevate arvude summa on võrdne teise virna kaartidel olevate arvude summaga. Esimeses virnas on kaardid arvudega 8 ja 28 ning teises kaardid arvudega 4, 12 ja 20.

Hindamine:

Näidatud, et kaarti arvuga 3 ei saa kasutada	2p
Näidatud, et kõiki paarisarvudega kaarte ei saa kasutada	2p
Näidatud, et viit paarisarvulist kaarti saab nii kahte virna jaotada	<u>3p</u>
	7p

Märkus. Antud vaid õige vastus ja kaartide jaotus anda 2p.

3. Vastus: Kood on 93150384.

Lahendus:

Kuna kõikidele tähtedele vastavad numbrid ja teame, et G on kaks korda suurem kui H , siis on neli võimalust:

- 1) $H = 1$ ja $G = 2$;
- 2) $H = 2$ ja $G = 4$;
- 3) $H = 3$ ja $G = 6$;
- 4) $H = 4$ ja $G = 8$.

Kuna H ja G peavad olema erinevad, siis H ei saa olla 0.

Et A ja B summa on võrdne G ja H summaga, siis leiame võimalikud A ja B väärtused arvestades, et kõik neli numbrit A , B , G ja H peavad olema erinevad ning et G ja H korrutis on A ja B korrutisest 5 võrra suurem.

- 1) Kui $H = 1$ ja $G = 2$, siis A ja B summa on 3. Seega A ja B saaks olla 0 ja 3. Sel juhul oleks G ja H korrutis 2 ja A ja B korrutis 0, mis ei sobi.
- 2) Kui $H = 2$ ja $G = 4$, siis A ja B summa on 6, ning A ja B saaks olla 5 ja 1. Sel juhul $H \cdot G = 8$ ja $A \cdot B = 5$. Ei sobi.
- 3) Kui $H = 3$ ja $G = 6$, siis A ja B summa on 9 ning A ja B saaksid olla kas 8 ja 1 või 7 ja 2 või 5 ja 4. Et $H \cdot G = 18$, siis $A \cdot B$ peab olema 13. Sellist võimalust aga A ja B võimalike väärtuste seas ei ole.
- 4) Kui $H = 4$ ja $G = 8$, siis A ja B summa on 12. Tähtedele A ja B saaks vastata siis arvud kas 9 ja 3 või 7 ja 5. Et $H \cdot G = 32$, siis $A \cdot B$ peab olema 27. See on nii, kui tähtedele A ja B vastavad numbrid 9 ja 3.

Järelikult $H = 4$ ja $G = 8$ ning tähtedele A ja B vastavad numbrid 9 ja 3, aga me veel ei tea kummale tähele vastab 9 ja kummale 3.

Teades, et $C + H = D$ ja $C + D < 8$ ning ka et $H = 4$, saame, et $C + C + H = C + C + 4 < 8$. Seega C on kas 0 või 1. Kuna C peab olema suurem kui E , siis $C = 1$. Järelikult $E = 0$.

Kuna C , D ja F korrutis peab olema võrdne B , G ja H summaga, siis $1 \cdot 5 \cdot F = B + 4 + 8$, kusjuures teame, et B on kas 3 või 9. Kui $B = 9$, siis F ei saa olla number. Kui $B = 3$, siis $F = 3$. Järelikult $B = 3$ ja $A = 9$ ning F on ka 3.

Hindamine:

Leitud H ja G kõik võimalikud paarid	1p
Vaadeldud kõiki H ja G paare ning leitud A ja B võimalikud väärtused	2p
Näidatud, miks C ja E peavad olema vastavalt 1 ja 0.	1p
Leitud D -le vastav number	1p
Näidatud, miks B on 3, F on 3 ja A on 9.	<u>2p</u>
	7p

Märkus: Kui on antud vaid õige vastus, siis anda 2p.

Kui on antud vastuseks õige kood ja näidatud, et selle korral on kõik tingimused täidetud anda 3p.

4. Vastus: Nii valgete kui hallide osade kogupindala on 33 cm^2 ja mustade osade kogupindala on 55 cm^2 .

Lahendus:

Lahendus 1.

Paneme tähele, et hallide osade kogupindala on võrdne valgete osade kogupindalaga.

Leiame valgete osade pindala. Valgetest osadest üks on täisnurkne kolmnurk ja kaks on nürinurksed kolmnurgad, mis on võrdsed.

Valge täisnurkne kolmnurk moodustab poole väiksemast ruudust. Seega on selle osa pindala $\frac{6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = 18 \text{ cm}^2$.

Valge nürinurkse kolmnurga aluseks on väiksema ruudu külg ning sellele vastava kõrguse pikkuse saame, kui pikema ruudu küljest lahutame lühema ja saadud vahe jagame pooleks. Kõrgus on $\frac{11 \text{ cm} - 6 \text{ cm}}{2} = 2,5 \text{ cm}$ ja ühe nürinurkse valge kolmnurga pindala on $\frac{6 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm}}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$. Seega valgete osade kogupindala on $18 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = 33 \text{ cm}^2$.

Hallide osade kogupindala on ka 33 cm^2 .

Mustade osade kogupindala saame, kui suure ruudu pindalast lahutame valgete ja hallide osade pindala: $121 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 33 \text{ cm}^2 = 55 \text{ cm}^2$.

Lahendus 2.

Paneme tähele, et hallide osade kogupindala on võrdne valgete osade kogupindalaga.

Leiame mustade osade pindala. Mustaks värvitud ala koosneb neljast ühesugusest kolmnurgast. Iga kolmnurga aluseks on suurema ruudu külg ning sellele vastava kõrguse pikkuse saame kui pikema ruudu küljest lahutame lühema ja saadud vahe jagame pooleks.

Kõrgus on $\frac{11 \text{ cm} - 6 \text{ cm}}{2} = 2,5 \text{ cm}$ ja järelikult ühe musta kolmnurga pindala on

$\frac{11 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm}}{2} = 13,75 \text{ cm}^2$. Mustade osade kogupindala on $4 \cdot 13,75 \text{ cm}^2 = 55 \text{ cm}^2$.

Hallide ja valgete osade pindala saame, kui suure ruudu pindalast lahutame mustade osade kogupindala ja tulemuse jagame arvuga 2.

Nii hallide kui ka valgete osade kogupindala on $(121 \text{ cm}^2 - 55 \text{ cm}^2) : 2 = 33 \text{ cm}^2$.

Hindamine:

Lahendus 1:

Tähelepanek, et hallide ja valgete osade pindalad on võrdsed	1p
Leitud valge täisnurkse kolmnurga pindala	1p
Leitud valge nürinurkse kolmnurga kõrgus ja alus	1p
Leitud valge nürinurkse kolmnurga pindala	1p
Leitud valgete osade kogupindala	1p
Leitud hallide osade kogupindala	1p
Leitud mustade osade kogupindala	<u>1p</u>
	7p

Lahendus 2:

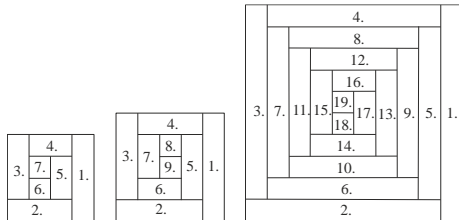
Tähelepanek, et hallide ja valgete osade pindalad on võrdsed	1p
Tähelepanek, et mustaks värvitud osa koosneb neljast võrdsest kolmnurgast.	1p
Leitud ühe musta kolmnurga kõrgus ja alus	1p
Leitud musta kolmnurga pindala	1p
Leitud mustade osade kogupindala	1p
Leitud valgete osade kogupindala	1p
Leitud hallide osade kogupindala	<u>1p</u>
	7p

Märkus: ainult õige vastus, koos õige ühikuga anda 2p

5. Vastus: 1. Ruut lõigati 19 osaks. 2. Ruut lõigati 2023 osaks. Riba, mis eraldati 789. lõikamisega, oli pikkusega 1236 cm.

Lahendus:

Teeme skeemi ja märgime sinna lõigatavad ribad koos järjekorranumbritega. Vaatame näiteks ruute paarisarvuliste küljepikkuste 8, 10 ja 20.



Paneme tähele, et esimene ribadest on ainus, mille pikkus on võrdne ruudu külje pikkusega.

Järgmised kaks rida on ühepikkused ja ning ka järgmised kaks on omavahel võrdsed jne.

Paneme ka tähele, et kui ruudu külje pikkus on x cm, siis ribasid saime $x - 1$.

Näitame, et see on tõesti nii. Kasutame selleks ribade pindalaid.

Kui meil on alguses ruut küljepikkusega a cm (a on paarisarv), siis esimese rida pindala on $2 \text{ cm} \cdot a \text{ cm} = 2a \text{ cm}^2$. Teise ja kolmanda rida pindala on $2 \text{ cm} \cdot (a - 2) \text{ cm}$ ehk 4 cm^2 väiksem kui esimesel. Eelviimase ja viimase rida pindala on 4 cm^2 .

Seega ribade pindalade summa on $2a \text{ cm}^2 + 2(a - 2) \text{ cm}^2 + 2(a - 4) \text{ cm}^2 + \dots + 2 \cdot 4 \text{ cm}^2$. Mitu korda saab paarisarvust a lahutada arvu 2, et järgi jääks arv 2? Kuna a on paarisarv, siis see avaldub kujul $a = 2 \cdot m$, kus m on naturaalarv, ning arvu 2 saab lahutada sellest $m - 1$ korda, et alles jääks arv 2. Seega ribade arv on $1 + 2(m - 1)$.

1. Kui paberruudu serva pikkus oli 20 cm, siis lõigati see 19 ribaks.

2. Kui paberruudu serva pikkus oli 2024 cm, siis lõigati see 2023 ribaks.

Leiame nüüd 789. lõikamisega saadava pabeririba pikkuse.

Paneme tähele, et paarituuravuliste järjekorranumbritega ribad on paralleelsed esimese lõigatud ribaga ning seejuures need, mis arvuga 4 jagamisel annavad jäägi 1 on kõik lõigatud esialgse ruudu selle serva poolt, millest lõikasime esimese rida. Paneme tähele ka seda, et iga järgmine on eelmisest, mille järjekorranumber andis arvuga 4 jagamisel jäägi 1, lühem 4 cm võrra.

Et $789 : 4 = 197$ jääk 1, siis 789. lõikamisega saadud rida paikneb esimese lõigatud ribaga samas servas.

Kui rida järjekorranumber avaldub kujul $4k + 1$, siis rida on $2 \cdot k \cdot 2 \text{ cm} = 4k \text{ cm}$ võrra lühem 1. lõigatud ribast.

Et $789 : 4 = 197$ jääk 1 ehk $789 = 4 \cdot 197 + 1$, siis 789. rida on $4 \cdot 197 \text{ cm}$ võrra lühem 1. ribast, mille pikkus oli 2024 cm.

Saame, et 789. rida on pikkusega $2024 \text{ cm} - 4 \cdot 197 \text{ cm} = 1236 \text{ cm}$.

Hindamine:

Leitud mitmeks osaks ruut lõigati, kui serva pikkus oli 20 cm	1p
Leitud mitmeks osaks ruut lõigati, kui serva pikkus oli 2024 cm	1p
Märgatud, millises servas millise lõikamise järjekorranumbriga ribad on	1p
Määratud õigesti 789. lõikamisega saadava riba paiknemine	1p
Näidatud, kuidas leida 789. lõikamisega eraldatud riba pikkust	2p
Leitud 789. lõikamisega saadud riba pikkus	<u>1p</u>
	7p

Märkused:

- 1) *Ei ole vaja tõestada tekkivate ribade arvu üldjuhul. Piisab, kui need leitakse vaid konkreetsel juhudel.*
- 2) *Kui on antud vaid kolm vastust, anda 3p*